Tentamen Partiële Differentiaalvergelijkingen
29 Juni 2004, 08.30–11.30 uur

1. Los het volgende Cauchy probleem op:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad u(x,x) = \frac{x}{2}.$$

Controleer het antwoord en schets de karakteristieken.

2. Geef in elk punt van $\mathbb{R}^2$ de klassificatie van de vergelijking

$$u_{xx} + 2u_{xy} + (\cos y)^2 u_{yy} + u_y = 0,$$

en bepaal, waar mogelijk, de karakteristieken. Schets de situatie.

3. Beschouw de warmte-vergelijking

$$u_t = u_{xx} + u, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

met de condities

$$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad t > 0, \quad u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < \pi.$$

Reduceer dit probleem door de substitutie $u(x,t) = e^t v(x,t)$. Neem aan dat $f(x)$ gegeven wordt door

$$f(x) = a, \quad 0 < x \le \pi/2, \quad f(x) = -a, \quad \pi/2 < x \le \pi.$$

Bepaal de (formele) reeeksontwikkeling van de oplossing $u(x,t)$.

4. Neem aan dat $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ een voldoende glad gebied is en neem aan dat $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ een continue functie is. Toon aan dat onder alle oplossingen van het niet-lineaire probleem

$$\Delta u - u^2 = 0 \quad \text{in} \quad \Omega,$$

met de randconditie

$$u = f \quad \text{op} \quad \partial\Omega,$$

er hooguit één niet-negative oplossing is.
Aanwijzing: gebruik $\int_\Omega ((\nabla w)^2 + w\Delta w)dxdydz = \int_{\partial\Omega} w\frac{\partial w}{\partial n} dS$, één van de formules van Green.

5. Laat u harmonisch zijn op een begrensd gebied $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ en neem aan dat $|\nabla u| > 0$ in Ω. Toon aan dat $|\nabla u|$ het maximum aanneemt op de rand van Ω.
Aanwijzing: bepaal het teken van de Laplaciaan van $(\nabla u)^2$.